时空穿梭

【问题描述】

请选出n维空间中的c个不同整点，满足如下条件：

1. 每一个点的第i维坐标在$[1, m_i]$之间；
2. 这c个点共线。

求方案数$\mathrm{mod}\ 10007$。

【数据范围】

很大。

【60分暴力】

枚举最远的两个点的坐标差$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$。
这条线段上有$g = \gcd(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + 1$个整点，有$C(g, c)$种方法选出$c$个点。
选线段有$\prod_{i=1}^{n}(m_i - \Delta x_i + 1)$种选法。
所以总的方案数为

$$\sum_{\Delta x_1=1}^{m_1}\sum_{\Delta x_2=1}^{m_2}\ldots\sum_{\Delta x_n=1}^{m_n} C(\gcd(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) - 1, c - 2)\left(\prod_{i=1}^{n}(m_i - \Delta x_i)\right)$$

$$= \sum_{g=1}^{\min(m)} C(g-1, c-2)\left(\sum_{\Delta x_1=1}^{\left\lfloor\frac{m_1}{g}\right\rfloor}\sum_{\Delta x_2=1}^{\left\lfloor\frac{m_2}{g}\right\rfloor}\ldots\sum_{\Delta x_n=1}^{\left\lfloor\frac{m_n}{g}\right\rfloor}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_i - \Delta x_i g)\right)[\gcd(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = 1]\right)$$

$$= \sum_{g=1}^{\min(m)} C(g-1, c-2)\left(\sum_{\Delta x_1=1}^{\left\lfloor\frac{m_1}{g}\right\rfloor}\sum_{\Delta x_2=1}^{\left\lfloor\frac{m_2}{g}\right\rfloor}\ldots\sum_{\Delta x_n=1}^{\left\lfloor\frac{m_n}{g}\right\rfloor}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_i - \Delta x_i g)\right)\left(\sum_{\forall i, t \mid \Delta x_i}\mu(t)\right)\right)$$

$$= \sum_{g=1}^{\min(m)} C(g-1, c-2)\sum_{t=1}^{\left\lfloor\frac{m}{g}\right\rfloor}\mu(t)\left(\sum_{\Delta x_1=1}^{\left\lfloor\frac{m_1}{gt}\right\rfloor}\sum_{\Delta x_2=1}^{\left\lfloor\frac{m_2}{gt}\right\rfloor}\ldots\sum_{\Delta x_n=1}^{\left\lfloor\frac{m_n}{gt}\right\rfloor}\left(\prod_{i=1}^{n}(m_i - \Delta x_i gt)\right)\right)$$

$$= \sum_{g=1}^{\min(m)} C(g-1, c-2)\sum_{t=1}^{\left\lfloor\frac{m}{g}\right\rfloor}\mu(t)\left(\prod_{i=1}^{n}\sum_{x=1}^{\left\lfloor\frac{m_i}{gt}\right\rfloor}(m_i - xgt)\right)$$

注意到

$$\sum_{x=1}^{\left\lfloor\frac{m_i}{gt}\right\rfloor}(m_i - xgt) = m_i\left\lfloor\frac{m_i}{gt}\right\rfloor - \frac{gt\left\lfloor\frac{m_i}{gt}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{m_i}{gt}\right\rfloor + 1\right)}{2} = f(m_i, gt)$$

$$\sum_{g=1}^{\min(m)} C(g-1, c-2)\sum_{t=1}^{\left\lfloor\frac{m}{g}\right\rfloor}\mu(t)\left(\prod_{i=1}^{n} f(m_i, gt)\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{\min(m)} \left(\prod_{i=1}^{n} f(m_i, h)\right) \sum_{(g|h)} C(g-1, c-2)\mu\left(\frac{h}{g}\right)$$

如果令

$$G(h) = \sum_{g|h} C(g-1, c-2)\mu\left(\frac{h}{g}\right)$$

预处理$G(1), G(2), \ldots, G(m)$是$O(m\log m)$的。询问求的就是

$$\sum_{h=1}^{\min(m)} G(h)\left(\prod_{i=1}^{n} f(m_i, h)\right)$$

询问是$O(mn)$的。

【100分算法】

神奇的地方来了。

考虑

$$f(m,h) = m\left\lfloor\frac{m}{h}\right\rfloor - \frac{h\left\lfloor\frac{m}{h}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{m}{h}\right\rfloor + 1\right)}{2}$$

由于n元组$\left(\left\lfloor\frac{m_1}{h}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{m_2}{h}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{m_n}{h}\right\rfloor\right)$至多有$O\left(n\sqrt{m}\right)$种取值，所以

$$\prod_{i=1}^{n} f(m_i, h)$$

是一个分成$O\left(n\sqrt{m}\right)$段，每段都是一个n次多项式的分段函数。考虑在一段$[l,r]$内，我们用$P(h)$表示$\prod_{i=1}^{n} f(m_i, h)$，也就是我们要求

$$\sum_{h=l}^{r} G(h)P(h)$$

令$P(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k$，即要求

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{h=l}^{r} G(h)h^k$$

我们假设可以$O(1)$算出

$$\sum_{h=l}^{r} G(h)h^k$$

并预处理出a_i，那么求答案是$O\left(n^2\sqrt{m}\right)$的了。

$G(h)h^k$直接用前缀和做一下就行了。

而a_i的话，因为$P(x)$是n个形如$(px+q)$的一次多项式相乘，所以$O(n^2)$的暴力多项式乘法就可以求出这个多项式。

做完了~

说了这么多，回顾一下算法流程：

预处理：

1. 求μ函数。
2. 对每一组c和h，求出

$$G(c,h) = \sum_{g|h} C(g-1, c-2)\mu\left(\frac{h}{g}\right)$$

   这个可以在枚举c之后用$O(m\log m)$的时间预处理出来。
3. 对于每一组c, k, l求出

$$\sum_{h=1}^{l} G(c,h)h^k$$

每一组数据：

1. 求出$O\left(n\sqrt{m}\right)$个断点。
2. 对于每一段求出多项式P的系数a_i。然后求

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{h=l}^{r} G(h)h^k$$

复杂度?

预处理是$O(nmc + cm\log m)$的。

每一组数据是$O\left(n^3\sqrt{m}\right)$的。

所以是$O\left(nmc + mc\log m + Tn^3\sqrt{m}\right)$的。

好复杂啊。。。orz 贾教。。。